ENSA KENITRA

Année universitaire 2018-2019
Semestre 4

# TD: Traitement Signal: Fiche 1

M.MASLOUHI

**Exercice 1** Former le développement en série de Fourier des fonctions suivantes, étudier leurs convergences et en déduire les sommes des séries indiquées.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi$-périodique telle que $f(x) = x$ si $x \in ]0, \pi[$ et $f(x) = 0$ si $x \in ]-\pi, 0[$. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2-périodique, telle que $f(x) = x^2$ si $x \in [-1, 1]$. Calculer les sommes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Exercice 2** Développer la fonction $x \mapsto \cos x$ comme somme d'une série de Fourier de sinus sur l'intervalle $]0, \pi[$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$.

**Exercice 3** Soit $h \in ]0, \pi[$. En considérant une fonction périodique adéquate, montrer que l'on peut développer la fonction $f$ définie par:

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in ]0, h[, \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in ]h, \pi[,$$

en une série de Fourier de cosinus.

**Exercice 4** En considérant la fonction paire $2\pi$-périodique définie sur $]0, \pi[$ par $\frac{\sin(x)}{x}$, montrer que l'on peut écrire

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad 0 < x < \pi.$$

Montrer que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

et en déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

**Exercice 5** Soit $f$ une fonction $2\pi$ périodique de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + y = f(t) \quad \text{sur} \quad [0, 2\pi]$$ (controle)

admet une et une seule solution $2\pi$ périodique que l'on déterminera.

**Exercice 6** Soit $f$ une fonction $2\pi$ périodique, paire, de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $a_1(f) = 0$. Déterminer toutes les solutions $2\pi$ périodiques de l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + y = f(t) \quad \text{sur} \quad [0, 2\pi]$$